BACALAUREAT 2005
SESIUNEA SPECIALĂ

M1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte numere de 4 cifre distincte se pot forma utilizând cifre din mulţimea $\{1, 2, 3, 4\}$?

2. Cât este suma tuturor elementelor grupului $(\mathbb{Z}_{12}, +)$?

3. Cât este produsul $\log_2 3 \cdot \log_3 4$?

4. Care este valoarea sumei $C_8^0 + C_8^2 + C_8^4 + C_8^6 + C_8^8$?

5. Dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, care este probabilitatea ca un element al matricei A^5 să fie egal cu 0?

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$?

8. Cum este funcţia f, convexă sau concavă?

9. Cât este $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

10. Cât este $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$?

SUBIECTUL II
În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$, se consideră punctele $A(3, 4, 5)$, $B(4, 5, 3)$, $C(5, 3, 4)$.

11. Care este ecuaţia planului care trece prin punctele A, B şi C?

12. Care este lungimea segmentului AB?

13. Care este aria triunghiului ABC?

14. Care este lungimea medianei din A a triunghiului ABC?

15. Cât este $\cos(\sphericalangle BAC)$?

16. Care sunt coordonatele centrului de greutate ale triunghiului ABC?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III
Se consideră polinoamele $f_n \in \mathbb{C}[X]$, definite prin $f_0 = 1$ şi $f_1 = X$, $f_2 = \dfrac{X(X-1)}{1 \cdot 2}$, ...,
$f_n = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$, ..., $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $f_n(k) = C_k^n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\ k \geq n$.

b) Să se arate că $f_n(k) \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $(\forall)\ k \in \mathbb{Z}$.

c) Să se găsească un polinom g de gradul trei, cu coeficienţi raţionali, cel puţin unul neîntreg, astfel încât $g(k) \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ k \in \mathbb{Z}$.

d) Să se arate că $\text{grad}(f_n) = n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

e) Să se arate că dacă $h \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom de grad 3, atunci există a_0, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{C}$, unice, astfel încât $h = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$.

f) Să se arate că dacă $w \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom de grad 3, astfel încât $w(k) \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$, atunci $w(k) \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ k \in \mathbb{Z}$.

g) Să se arate că dacă $u \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom de grad 3, astfel încât $u(k) \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$, atunci există $p \in \mathbb{Z}$, astfel încât $u(k) \neq p$, $(\forall)\ k \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f_0(x) = 1 - \cos x$ şi $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\ dt$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $f_1(x) = x - \sin x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$,

$$f_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^2}{2!} + (-1)^n + (-1)^{n+1}\cos x.$$

d) Să se arate că graficul funcţiei f_1 nu are asimptotă către ∞.

e) Să se arate că $0 \leq f_n(x) \leq 2 \cdot \dfrac{x^n}{n!}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\ x > 0$.

f) Să se arate că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $(\forall)\ x > 0$.

g) Să se arate că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = \cos x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

SESIUNEA SPECIALĂ

M1

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este $f(x) = 5x + 1$, cât este suma $f(1) + f(2) + \ldots + f(20)$?

2. Câte mulţimi X verifică relaţia $\{a, b, c\} \subseteq X \subseteq \{a, b, c, d, e\}$?

3. Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este $f(x) = x^2 - 2$, cât este $(f \circ f)(-1)$?

4. Care este probabilitatea ca un element al inelului $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ să fie soluţie a ecuaţiei $\hat{5} \cdot \hat{x} = \hat{0}$?

5. Care este numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$?

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$?

8. Cum este funcţia f, convexă sau concavă?

9. Cât este $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

10. Cât este $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{3n + 5}{2n - 1}$?

SUBIECTUL II

11. Care este distanţa dintre punctele $A(3, 4, 5)$ şi $B(4, 3, 5)$?

12. Care este lungimea razei cercului $x^2 + y^2 = 9$?

13. Care este aria triunghiului determinat de punctele $P(0, 1)$, $Q(1, 0)$ şi $R(1, 1)$?

14. Care este ecuaţia dreptei care trece prin punctele $P(0, 1)$ şi $Q(1, 0)$?

15. Care este modulul numărului complex $\sin 1 + i \cos 1$?

16. Care este valoarea produsului $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{20}$?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III

a) Să se arate că , dacă $x, y \in (-1, 1)$, atunci $-1 < \dfrac{x + y}{1 + xy} < 1$.

Pe mulţimea $G = (-1, 1)$ se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$, $(\forall)\ x, y \in G$.

b) Să se verifice egalitatea $x \circ y = \dfrac{(1 + x)(1 + y) - (1 - x)(1 - y)}{(1 + x)(1 + y) + (1 - x)(1 - y)}$, $(\forall)\ x, y \in G$.

c) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in G$.

d) Să se determine $e \in G$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in G$.

e) Să se arate că $(\forall)\ x \in G$, există $y \in G$ astfel încât $x \circ y = y \circ x = 0$.

f) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $(\forall)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$,

$$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = \frac{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) - (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) + (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}.$$

g) Să se arate că $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \ldots \circ \frac{1}{n} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

c) Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

d) Să se determine ecuaţia asimptotei la graficul funcţiei f către $-\infty$.

e) Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \frac{f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \ldots + f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

f) Să se arate că $\int_0^x \sqrt{t^2+a^2}\, dt = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \frac{a^2}{2}\ln a$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ a > 0$.

g) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este $f(x)=x-3$, cât este produsul $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(7)$?

2. Câte submulţimi nevide ale mulţimii $\mathbb{Z}_3$ au suma elementelor egală cu $\hat{0}$?

3. Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este $f(x)=-x^4+2x$, cât este $(f\circ f)(1)$?

4. Care este probabilitatea ca un element n din mulţimea $\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relaţia $2^n+5^n=3^n+4^n$?

5. Câte soluţii reale are ecuaţia $x^4=16$?

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x+\dfrac{1}{2}\cdot$

6. Cât este $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$?

7. Cât este $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$?

8. Cum este funcţia f pe mulţimea numerelor reale : convexă sau concavă?

9. Cât este $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

10. Cât este $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}$?

SUBIECTUL II

11. Care este distanţa dintre punctele $A(1,3,5)$ şi $B(3,5,7)$?

12. Care este lungimea razei cercului $x^2+y^2=4$?

13. Cât este $\cos^2\pi+\sin^2\pi$?

14. Care este modulul numărului complex $\dfrac{5+8i}{8-5i}$?

15. Cât este aria unui triunghi cu lungimile laturilor de 3, 3 şi 4?

16. Care este ecuaţia tangentei la parabola $y^2=2x$ dusă prin punctul $P(2,2)$?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ şi $K=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Spunem că matricea $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este *nilpotentă*, dacă există $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $M^n=O_2$.

a) Să se verifice că matricele O_2 şi J sunt nilpotente.

b) Să se arate că matricea K nu este nici inversabilă nici nilpotentă.

c) Să se arate că, dacă matricea $X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este $X=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$, atunci avem identitatea $X^2-(p+s)X+(ps-rq)I_2=O_2$.

d) Să se arate că, dacă matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $A^2 = O_2$, atunci $a + d = 0$ şi $ad - bc = 0$.

e) Să se arate că, dacă matricea $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este nilpotentă, atunci $B^2 = O_2$.

f) Să se arate că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice nilpotente.

SUBIECTUL IV

a) Să se verifice că $\frac{1}{1-a} = 1 + a + \ldots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ şi $(\forall)\ a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b) Să se deducă relaţia $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 + \ldots + (-1)^n(\sqrt{x})^n + (-1)^{n+1}\frac{(\sqrt{x})^{n+1}}{1+\sqrt{x}}$, $(\forall)\ x \in [0,1]$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că $0 \le \frac{(\sqrt{x})^{n+1}}{1+\sqrt{x}} \le (\sqrt{x})^{n+1}$, $(\forall)\ x \in [0,1]$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^b \frac{(\sqrt{x})^{n+1}}{1+\sqrt{x}}\, dx = 0$, $(\forall)\ b \in [0,1]$.

e) Să se calculeze integrala $\int_0^b \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$, unde $b > 0$.

f) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}}\, dt,\ (\forall)\ x \in [0,1].$$

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M1

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Cât este suma $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}$ în grupul $(\mathbb{Z}_6,+)$?

2. Câte soluţii reale are ecuaţia $2^{x^2}=4$?

3. Câte funcţii $f:\{a,b,c\}\to\{1,2\}$ verifică relaţia $f(a)\cdot f(b)=1$?

4. Care este probabilitatea ca un element x din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$ să fie soluţie a ecuaţiei $x^2-5x+6=0$?

5. Care este prima zecimală a numărului $\sqrt{120}$?

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

6. Cât este $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$?

7. Cât este $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$?

8. Câte puncte de extrem local are funcţia f?

9. Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei f?

10. Cât este $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}$?

SUBIECTUL II

11. Cât este lungimea segmentului care uneşte punctele $A(-3,1,2)$ şi $B(1,-3,2)$?

12. Cât este modulul numărului complex $1-i$?

13. Cât este perimetrul unui triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi 6 şi 8?

14. Cât este suma celor două soluţii complexe, nereale, ale ecuaţiei $x^4=1$?

15. Dacă ecuaţia planului care trece prin punctele $A(-3,1,2)$, $B(1,-3,2)$ şi $C(2,1,-3)$ este $x+az+by+c=0$, cât este $a+b+c$?

16. Cât este aria triunghiului PQR în care $PQ=1$, $QR=2$ şi $m(\sphericalangle PQR)=\dfrac{\pi}{6}$?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se calculeze matricele A^2 şi A^3.

c) Să se verifice că $A^3+A^2+A=O_3$.

d) Să se găsească o matrice $B\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $B\neq O_3$, cu proprietatea $AB=BA=O_3$.

e) Să se arate că $A^{2005}=A$.

f) Să se arate că $I_3\neq aA+bA^2+cA^3$, $(\forall)$ a, b, $c\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x^2 + 2 - \ln x^2 + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

d) Să se arate că $0 < f(x) \leq \ln 2$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că $\ln(t^2 + a^2)\ dt = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, $(\forall)$ $a \in \mathbb{R}^*$.

f) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M2

Filiera tehnologică, profil Servicii, toate specializările; profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ au proprietatea $f(a) < f(b)$?
2. Care este probabilitatea ca un element n din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relaţia $n^2 < n!$?
3. Câte soluţii reale are ecuaţia $2^x + 2 = 0$?
4. Care este valoarea sumei $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + 49$?
5. Dacă funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt $f(x) = 2x + 3$ şi $g(x) = 3x + 2$, cât este $(g \circ f)(-1)$?

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$?
7. Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?
8. Câte asimptote verticale are graficul funcţiei f?
9. Cât este $\displaystyle\int_0^1 e^x \, dx$?
10. Cât este $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n + 3}{3n + 2}$?

SUBIECTUL II

11. Cât este distanţa de la punctul $A(1, 1)$ la punctul $B(2, 2)$?
12. Care este ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(1, 1)$ şi $B(2, 2)$?
13. Cât este aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{3}$?
14. Care este conjugatul numărului complex $2 + 3i$?
15. Cât este $\cos^2 1 + \sin^2 1$?
16. Dacă în triunghiul ABC, $AB = 2$, $AC = 3$ şi $m(\sphericalangle BAC) = \dfrac{\pi}{3}$, cât este BC?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi polinomul $f = X^2 - 6X + 5$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x) = 0$.

b) Să se calculeze determinantul matricei A.

c) Să se calculeze matricea A^2.

d) Să se verifice că $f(A) = O_2$. (Prin $f(A)$ înţelegem matricea $A^2 - 6A + 5I_2$).

e) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$, unde x, $y \in \mathbb{R}$.

f) Să se arate că $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^n+1 & 5^n-1 \\ 5^n-1 & 5^n+1 \end{pmatrix}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, \infty)$.

b) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

c) Să se verifice că $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

d) Să se arate că, dacă x, $y \in (0, \infty)$, $x \neq y$, atunci $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

f) Să se arate că $\left|\dfrac{p}{q} - \sqrt{2}\right| > \left|\dfrac{p+2q}{p+q} - \sqrt{2}\right|$, $(\forall)\ p$, $q \in \mathbb{N}^*$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M3

Filiera Vocaţională: profil Pedagogic, specializările învăţător-educatoare

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$ au proprietatea $f(a) = f(b) = 1$?

2. Câte elemente din mulţimea $\{7, 8, \ldots, 25\}$ se divid cu 3?

3. Dacă mulţimea A are 4 elemente, mulţimea B are 5 elemente şi mulţimea $A \cap B$ are 2 elemente, câte elemente are mulţimea $A \cup B$?

4. Cât este produsul primelor 10 zecimale ale numărului $\sqrt{26}$?

5. Câte elemente din şirul C_5^0, C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5 sunt numere impare?

Se consideră triunghiul echilateral ABC cu lungimea laturii de 4.

6. Cât este perimetrul triunghiului ABC?

7. Cât este lungimea înălţimii triunghiului ABC?

8. Cât este aria triunghiului ABC?

9. Cât este raportul dintre perimetrul triunghiului ABC şi perimetrul triunghiului care are vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC?

10. Cât este raportul dintre aria triunghiului ABC şi aria triunghiului care are vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC?

SUBIECTUL II

11. Câte rădăcini reale are ecuaţia $x^2 + 6x - 7 = 0$?

12. Care este mulţimea valorilor reale ale lui x care verifică inecuaţia $x^2 + 6x - 7 < 0$?

13. Câte rădăcini reale are ecuaţia $9^x + 8 \cdot 3^x - 9 = 0$?

14. Cât este valoarea maximă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x$?

15. Care sunt valorile parametrului real m, pentru care $x^2 + 2x + m \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$?

16. Cât este produsul celor 4 rădăcini reale ale ecuaţiilor $9x^2 + 1986x + 25 = 0$ şi $25x^2 + 1986x + 9 = 0$?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL III

Se consideră un triunghi echilateral ABC, cu lungimea laturii 2 şi un punct M în interiorul său . Picioarele perpendicularelor duse din M pe segmentele (BC), (CA), (AB) se notează cu D, E, F. Notăm lungimile segmentelor: $BD = 1 + a$, $CE = 1 + b$ şi $AF = 1 + c$, unde a, b, $c \in (-1, 1)$.

a) Să se determine măsura în grade a unghiului $\sphericalangle ABC$.

b) Utilizând teorema lui *Pitagora*, să se arate că $MB^2 - MC^2 = BD^2 - DC^2$.

c) Să se verifice identitatea $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz$, $(\forall)\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

d) Utilizând relaţia de la punctul **b)** , să se arate că $BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = 0$.

e) Utilizând relaţia de la punctul **d)** , să se arate că $a + b + c = 0$ şi că $BD + CE + FA = 3$.

f) Să se arate că, dacă $BD \cdot CE \cdot AF = CD \cdot EA \cdot BF$, atunci $a \cdot b \cdot c = 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulţimea A formată din toate numerele naturale care se scriu în baza zece cu două cifre distincte.

a) Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

b) Să se determine numărul elementelor mulţimii A care se divid cu 5.

c) Să se determine numărul de elemente ale mulţimii $\{x \in A \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Q}\}$.

d) Să se determine numărul de zerouri cu care se termină produsul elementelor mulţimii A, scris în baza zece.

e) Să se arate că produsul elementelor mulţimii A nu este un pătrat perfect.

f) Să se calculeze suma elementelor mulţimii A.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M2
Proba F

Filiera vocaţională, profil Artistic, specializările: Arhitectură, arte ambientale şi design; profil Militar, specializarea Ştiinţe sociale
Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe sociale

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$ au proprietatea $f(a) \neq f(b)$?

2. Câte soluţii are ecuaţia $3^{x^2} = 3^{-x}$?

3. Dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, cât este matricea A^5?

4. Care este valoarea sumei $1 + 11 + 111 + \ldots + 1111111$?

5. Care este produsul primelor 5 zecimale ale numărului $\sqrt{122}$?

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$?

7. Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

8. Câte asimptote verticale are graficul funcţiei f?

9. Cât este $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$?

10. Cât este $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n + 2}{2n + 5}$?

SUBIECTUL II

11. Cât este distanţa de la punctul $A(4, 4)$ la punctul $B(5, 5)$?

12. Cât este $\cos^2 6 + \sin^2 6$?

13. Dacă în triunghiul ABC, $AB = 1$, $AC = 1$ şi $m(\sphericalangle BAC) = \dfrac{\pi}{3}$, cât este BC?

14. Care este conjugatul numărului complex $-3 - 3i$?

15. Care este ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(4, 4)$ şi $B(5, 5)$?

16. Cât este aria unui triunghi cu lungimile laturilor de 7, 10 şi 11?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea de funcţii $G = \left\{ f_n \mid f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = (x + 1)^{3^n} - 1, (\forall)\, n \in \mathbb{Z}, (\forall)\, x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se verifice că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, aparţine mulţimii G.

b) Să se arate că $f_n \circ f_p = f_{n+p}$, $(\forall)\ n, p \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că inversa funcţiei f_n este funcţia f_{-n}, $(\forall)\ n \in \mathbb{Z}$.

d) Să se calculeze suma $f_1(-1) + f_2(-1) + \ldots + f_{2005}(-1)$.

e) Să se arate că funcţia f_1 este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

f) Să se arate că mulţimea G împreună cu operaţia de compunere a funcţiilor determină o structură de grup.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = h(x) + \frac{x^3}{3!}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + \frac{x^4}{4!}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $g'(x) = h(x)$ şi $f'(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $h(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 h(x)\ dx$.

e) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} g(x)$ şi $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

f) Să se arate că ecuaţia $g(x) = 0$ are o singură soluţie reală.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M3
Proba F

Filiera Teoretică,sp.Filologie; Filiera Vocaţională: profil Artistic, sp.:Arte plastice şi decorative, Coregrafie, Muzică şi Teatru;
profil Pedagogic, toate specializările cu excepţia învăţător-educatoare;profil Educaţie fizică şi sport ;
profil Militar, sp. Muzici militare; profil Teologic, toate specializările

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$ au proprietatea $f(a) + f(b) = 3$?

2. Câte elemente din mulţimea $\{7, 8, \ldots, 25\}$ **nu** se divid cu 4?

3. Dacă mulţimea A are 9 elemente, mulţimea B are 8 elemente şi mulţimea $A \cup B$ are 12 elemente, câte elemente are mulţimea $A \cap B$?

4. Care este produsul primelor 10 zecimale ale numărului $\sqrt{197}$?

5. Câte numere de 2 cifre *distincte* se pot forma utilizând numai cifre din mulţimea $\{1, 2, 3, 4\}$?

Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = AC = 6$.

6. Cât este perimetrul triunghiului ABC?

7. Cât este lungimea înălţimii din A a triunghiului ABC?

8. Cât este aria triunghiului ABC?

9. Cât este lungimea medianei din A a triunghiului ABC?

10. Cât este măsura în grade a unghiului $\sphericalangle ABC$?

SUBIECTUL II

11. Câte rădăcini reale are ecuaţia $5x^2 + 6x - 11 = 0$?

12. Care este mulţimea valorilor reale ale lui x care verifică inecuaţia $5x^2 + 6x - 11 < 0$?

13. Câte rădăcini reale are ecuaţia $64^x + 7 \cdot 8^x - 8 = 0$?

14. Care este valoarea minimă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$?

15. Care sunt valorile parametrului real m, pentru care $x^2 + 1 + m \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$?

16. Cât este produsul celor 4 rădăcini reale ale ecuaţiilor $5x^2 + 1986x - 9 = 0$ şi $9x^2 + 1986x - 5 = 0$?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III

Se consideră o dreaptă d, două puncte A şi B situate de o parte şi de alta a dreptei d. Notăm cu C simetricul punctului A faţă de dreapta d şi cu D intersecţia dreptelor BC şi d. (Punctul B se consideră astfel încât $C \neq B$ şi dreptele BC şi d nu sunt paralele). Mai considerăm un punct X pe dreapta d.

a) Să se arate că $AD = DC$.

b) Să se arate că dreapta d este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADB$.

c) Să se verifice că $|AD - DB| = BC$.

d) Să se arate că $XA = XC$.

e) Să se arate că $|XB - XA| \leq |AD - DB|$.

f) Să se arate că, dacă $|XB - XA| = |AD - DB|$, atunci $X = D$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulţimea $A = \{p + q\sqrt{3} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se arate că, dacă x, $y \in A$, atunci $x + y \in A$.

b) Să se arate că, dacă x, $y \in A$, atunci $x \cdot y \in A$.

c) Să se verifice că $1 \in A$ şi $2 - \sqrt{3} \in A$.

d) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că, dacă x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \in A$, atunci $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \in A$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se arate că $(2 - \sqrt{3})^n \in A$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că în intervalul $(0; 0,01)$ există un element din mulţimea A.

SESIUNEA AUGUST

M1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte soluţii reale are ecuaţia $16^x + 3 \cdot 4^x - 4 = 0$?

2. Dacă matricea A este $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ cât este matricea A^{2005}?

3. Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este $f(x) = x^3 - 9x$, cât este $(f \circ f)(3)$?

4. Care este probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relaţia $3^n > 5n + 2$?

5. Care este suma elementelor în grupul $(\mathbb{Z}_7, +)$?

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\, dx$?

8. Care este ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f?

9. Cât este $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$?

10. Cât este $\displaystyle\int_0^1 e^x\, dx$?

SUBIECTUL II

11. Dacă ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2, 2)$ şi $B(3, 3)$ este $x + ay + b = 0$, cât este $a + b$?

12. Care este distanţa de la punctul $C(0, 1)$ la dreapta $x - y = 0$?

13. Cât este numărul $\cos^2 2 + \sin^2 2$?

14. Care este modulul numărului complex $(1 - i)^4$?

15. Cât este aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, 2)$, $B(3, 3)$ şi $C(0, 1)$?

16. Care este ecuaţia tangentei la hiperbola $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ dusă prin punctul $P(3, 2)$?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III
Se consideră numărul complex $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi notăm $\overline{z} = a - bi$.

a) Să se calculeze $z + \overline{z}$.

b) Să se calculeze $z \cdot \overline{z}$.

c) Să se verifice că $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.

d) Să se determine $c, d \in \mathbb{R}$, ştiind că numărul complex $x = 3 + 4i$ verifică ecuaţia $x^2 + cx + d = 0$.

e) Utilizând metoda inducţiei matematice , să se arate că $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există a_n, $b_n \in \mathbb{R}$, astfel încât $z^n = a_n \cdot z + b_n$.

f) Să se arate că pentru orice $w \in \mathbb{C}$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există polinomul cu coeficienţi reali $f = X^n + pX + q$, cu proprietatea că $f(w) = 0$.

g) Să se arate că numărul complex $x = 3 + 4i$ nu poate fi rădăcină pentru niciun polinom $g \in \mathbb{R}[X]$, de forma $g = X^8 + r$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x}$ şi şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = a_n - f(n)$, $c_n = a_n - f(n+1)$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

c) Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $(\forall)$ $k > 0$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt{c}}$.

d) Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$, $(\forall)$ $k \in (0, \infty)$.

e) Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător iar şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

f) Să se arate că şirurile $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente.

g) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SESIUNEA AUGUST

M1

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ verifică relaţia $f(a) + f(b) = 4$?

2. Dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cât este matricea A^2?

3. Care este probabilitatea ca un element n din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relaţia $2^n > n!$?

4. Câte soluţii are ecuaţia $x^2 + x + 1 = 0$ în mulţimea numerelor reale?

5. Dacă funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt $f(x) = 2x - 3$ şi $g(x) = 3x - 2$, cât este $(f \circ g)(1)$?

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\cdot$

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$?

7. Cât este $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

8. Care este ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f?

9. Cât este $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$?

10. Cât este $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n + 3}{2n + 7}$?

SUBIECTUL II

11. Care este distanţa de la punctul $M(-2, 1)$ la punctul $N(2, -1)$?

12. Care este ecuaţia dreptei care trece prin punctele $M(-2, 1)$ şi $N(2, -1)$?

13. Care este aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 4?

14. Care este conjugatul numărului complex $\dfrac{1}{3}i$?

15. Care este semnul numărului $\cos(-1)$?

16. Dacă în triunghiul ABC, $AB = 2$, $AC = 3$ şi $m(\sphericalangle BAC) = \dfrac{\pi}{3}$, cât este BC?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III

Se consideră a, b, $c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - pX^2 + qX - r$, cu rădăcinile x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$, unde p, q, $r \in (0, \infty)$.

a) Să se determine $s \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f = s(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$.

b) Să se calculeze expresia $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$ în funcţie de p, q, r.

c) Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 - 2q$.

d) Să se arate că polinomul $g = X^3 - X^2 + X - 2$ nu are toate rădăcinile reale.

e) Să se arate că, dacă $x \in (-\infty, 0]$, atunci $f(x) < 0$.

f) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini în intervalul $(-\infty, 0]$.

g) Să se arate că, dacă $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ şi $abc>0$, atunci $a>0$, $b>0$, $c>0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^3-x^3$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,-1]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[-1,\infty)$.

d) Să se arate că $2\le f(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

e) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

f) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

SESIUNEA AUGUST

M2

Filiera tehnologică, profil Servicii, toate specializările; profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{a, b\} \to \{a, b\}$ au proprietatea $f(a) \neq f(b)$?

2. Câte soluţii reale are ecuaţia $x^2 + 10x - 11 = 0$?

3. Care este probabilitatea ca o submulţime a mulţimii $\{1, 2, 4\}$ să conţină numai elemente pare?

4. Dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cât este matricea A^2?

5. Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este $f(x) = 2x - 3$, care sunt coordonatele unui punct de pe graficul funcţiei f, pentru care abscisa este egală cu ordonata?

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \dfrac{1}{x}\cdot$

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$?

7. Cât este $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

8. Câte asimptote verticale are graficul funcţiei f?

9. Cât este $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ dx$?

10. Cât este $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{2n}$?

SUBIECTUL II

11. Cât este distanţa de la punctul $A(-1, -2)$ la punctul $B(-2, -1)$?

12. Care este ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(-1, -2)$ şi $B(-2, -1)$?

13. Cât este $\cos^2 12 + \sin^2 12$?

14. Care este conjugatul numărului complex $3 + i$?

15. Cât este aria unui triunghi cu lungimile laturilor de 5, 5 şi 6?

16. Dacă în triunghiul ABC, $AB = 5$, $AC = 5$ şi $m(\sphericalangle BAC) = \dfrac{\pi}{3}$, cât este BC?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL III

a) Să se arate că $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} - \dfrac{(x+y)^2}{a+b} = \dfrac{(xb - ya)^2}{ab(a+b)}$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)$ $a, b \in (0, \infty)$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = \dfrac{(x + x^2)^2}{5}\cdot$

c) Să se arate că $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)$ $a, b \in (0, \infty)$.

d) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)\ a_1,\ a_2,\ \ldots,$ $a_n \in (0, \infty)$, avem inegalitatea $\dfrac{x_1^2}{a_1} + \dfrac{x_2^2}{a_2} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{a_n} \geq \dfrac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

e) Să se arate că $\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{x+z} + \dfrac{z^2}{x+y} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$, $(\forall)\ x,\ y,\ z \in (0, \infty)$.

f) Să se arate că $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} \geq \dfrac{9}{2(a+b+c)}$, $(\forall)\ a,\ b,\ c \in (0, \infty)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(e^x + \dfrac{1}{e^x}\right)$ şi $g(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

a) Să se arate că $f'(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

c) Să se verifice că $f(x) \geq \ln 2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$.

f) Să se determine ecuaţia asimptotei la graficul funcţiei f către $+\infty$.

SESIUNEA AUGUST

M3

Filiera Vocaţională: profil Pedagogic, specializările învăţător-educatoare

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ au proprietatea $f(1) \cdot f(2) = 2$?

2. Câte elemente din mulţimea $\{101, 102, \dots, 125\}$ se divid cu 5?

3. Dacă mulţimea A are 7 elemente, mulţimea B are 6 elemente şi mulţimea $A \cup B$ are 9 elemente, câte elemente are mulţimea $A \cap B$?

4. Cât este produsul primelor 10 zecimale ale numărului $\sqrt{65}$?

5. Câte elemente din şirul C_6^0, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6 se divid cu 3?

Se consideră triunghiurile asemenea ABC şi DEF astfel încât $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = 3$.

6. Cât este raportul dintre perimetrul triunghiului ABC şi perimetrul triunghiului DEF?

7. Cât este raportul dintre aria triunghiului ABC şi aria triunghiului DEF?

8. Dacă înălţimea din A a triunghiului ABC are lungimea 6, cât este lungimea înălţimii din D a triunghiului DEF?

9. Dacă măsura unghiului A al triunghiului ABC este $70°$, cât este măsura unghiului D al triunghiului DEF?

10. Dacă lungimea laturii AC este 9, cât este lungimea laturii DF?

SUBIECTUL II

11. Câte rădăcini reale are ecuaţia $x^2 + 5x - 6 = 0$?

12. Care este mulţimea valorilor reale ale lui x care verifică inecuaţia $x^2 + 5x - 6 < 0$?

13. Care este soluţia reală şi strict pozitivă a ecuaţiei $\log_3 x = 2$?

14. Care este soluţia reală a ecuaţiei $2^x = 0,5$?

15. Câte submulţimi cu 2 elemente are o mulţime cu 5 elemente?

16. Care este cel mai mic număr real a, pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$, este strict crescătoare pe intervalul $[a, \infty)$?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL III

Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, ($m(\sphericalangle A) = 90°$) şi un punct M pe segmentul (BC). Picioarele perpendicularelor duse din M pe catetele (AB) şi (AC) se notează cu N şi P.

a) Să se arate că $AM^2 = AP^2 + AN^2$.

b) Să se arate că $MC^2 = CP^2 + AN^2$.

c) Să se arate că $MB^2 = AP^2 + NB^2$.

d) Să se arate că triunghiul MBN este asemenea cu triunghiul CBA.

e) Să se deducă relaţiile $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{NB}{AB} = \dfrac{MB}{CB}$.

f) Să se arate că $AM^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulţimea $A = \{x^2 - 3y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se verifice că $\{0, 1, 4, 6\} \subset A$.

b) Să se verifice identitatea $(x^2 - 3y^2)(a^2 - 3b^2) = (xa + 3yb)^2 - 3(ay + bx)^2$, $(\forall)$ a, b, x, $y \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că, dacă z, $w \in A$, atunci $z \cdot w \in A$.

d) Să se arate că $2 \notin A$.

e) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $6^n \in A$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că mulţimea $\mathbb{Z} - A$ conţine cel puţin 2005 elemente.

SESIUNEA AUGUST

M2
Proba F

Filiera vocaţională, profil Artistic, specializările: Arhitectură, arte ambientale şi design; profil Militar, specializarea Ştiinţe sociale
Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe sociale

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{a, b, c\} \to \{a, b\}$ au proprietatea $f(a) = f(b)$?

2. Câte soluţii are ecuaţia $5^{x^2} = 5^{5x}$ în mulţimea numerelor reale?

3. Dacă matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, cât este matricea A^5?

4. Care este valoarea sumei $7 + 77 + 777 + \ldots + 7777777$?

5. Care este produsul primelor 5 zecimale ale numărului $\sqrt{145}$?

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

8. Câte puncte de extrem local are funcţia f?

9. Cât este $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$?

10. Cât este $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n + 2}{4n + 5}$?

SUBIECTUL II

11. Cât este distanţa de la punctul $A(-4, -4)$ la punctul $B(-5, -5)$?

12. Cât este $\cos^2 16 + \sin^2 16$?

13. Dacă în triunghiul ABC, $AB = 1$, $AC = 1$ şi $m(\sphericalangle BAC) = \dfrac{\pi}{2}$, cât este BC?

14. Care este conjugatul numărului complex $-3 + i$?

15. Care este ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(-4, -4)$ şi $B(-5, -5)$?

16. Cât este aria unui triunghi cu lungimile laturilor de 7, 7 şi 6?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III
Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi polinomul $f = X^2 - 10X + 16$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x) = 0$.

b) Să se calculeze determinantul matricei A.

c) Să se calculeze matricea A^2.

d) Să se verifice că $f(A) = O_2$. (Prin $f(A)$ înţelegem matricea $A^2 - 10A + 16I_2$).

e) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 5x+3y=0 \\ 3x+5y=0 \end{cases}$, unde $x,\ y \in \mathbb{R}$.

f) Să se arate că $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8^n+2^n & 8^n-2^n \\ 8^n-2^n & 8^n+2^n \end{pmatrix}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x(e^x-1)}$.

f) Să se arate că $f(x)\geq 1$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

SESIUNEA AUGUST

M3
Proba F

Filiera Teoretică,sp.Filologie; Filiera Vocaţională: profil Artistic, sp.:Arte plastice şi decorative, Coregrafie, Muzică şi Teatru;
profil Pedagogic, toate specializările cu excepţia învăţător-educatoare;profil Educaţie fizică şi sport ;
profil Militar, sp. Muzici militare; profil Teologic, toate specializările

SUBIECTUL I
Pentru întrebările 1-16 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ au proprietatea $f(1) \cdot f(2) = 2$?

2. Câte elemente din mulţimea $\{101, 102, \ldots, 125\}$ **nu** se divid cu 4?

3. Dacă mulţimea A are 9 elemente, mulţimea B are 8 elemente şi mulţimea $A \cap B$ are 4 elemente, câte elemente are mulţimea $A \cup B$?

4. Care este produsul primelor 10 zecimale ale numărului $\sqrt{257}$?

5. Câte numere de 3 cifre *distincte* se pot forma utilizând numai cifre din mulţimea $\{1, 2, 3, 4\}$?

Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 5$, $AC = 12$.

6. Cât este perimetrul triunghiului ABC?

7. Cât este lungimea înălţimii din A a triunghiului ABC?

8. Cât este aria triunghiului ABC?

9. Cât este lungimea medianei din A a triunghiului ABC?

10. Cât este cosinusul unghiului $\sphericalangle ABC$?

SUBIECTUL II

11. Câte rădăcini reale are ecuaţia $2x^2 + 3x - 5 = 0$?

12. Care este mulţimea valorilor reale ale lui x care verifică inecuaţia $2x^2 + 3x - 5 < 0$?

13. Câte rădăcini reale are ecuaţia $64^x - 8 = 0$?

14. Care este rădăcina reală, strict pozitivă, a ecuaţiei $\log_6 x = -2$?

15. Cât este suma $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$?

16. Care este cel mai mare număr dintre 2 şi $\sqrt[3]{9}$?

Pentru subiectele III şi IV se cer rezolvările complete
SUBIECTUL III
Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Să se arate că, dacă $AC \perp BD$, atunci aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

b) Să se arate că, dacă $AC \perp BD$, atunci $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = AB^2 + CD^2$.

c) Să se arate că, dacă $AC \perp BD$, atunci $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

d) Perpendiculara din A pe dreapta BD cade pe segmentul $[DO]$ în punctul E.
Să se arate că $AB^2 = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OE \cdot OB$.

e) Perpendiculara din C pe dreapta BD cade pe segmentul $[BO]$ în punctul F.
Să se arate că $CD^2 = OC^2 + OD^2 + 2 \cdot OF \cdot OD$.

f) Să se arate că, dacă $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, atunci $AC \perp BD$.

SUBIECTUL IV
Se consideră mulţimea $A = \{p + q\sqrt{5} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se arate că, dacă x, $y \in A$, atunci $x + y \in A$.

b) Să se arate că, dacă x, $y \in A$, atunci $x \cdot y \in A$.

c) Să se verifice că $1 \in A$ şi $\sqrt{5} - 2 \in A$.

d) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că, dacă x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \in A$, atunci $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \in A$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se arate că $(\sqrt{5} - 2)^n \in A$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că în intervalul $(0; 0,01)$ există un element din mulţimea A.